УДК 355. 424

П. А. Дранник

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ВІДБИТТЯ УДАРУ ПОВІТРЯНОГО ПРОТИВНИКА

Пропонується комплекс математичних моделей застосування сил та засобів протиповітряної оборони по відбиттю удару повітряного противника. Одержано математичну постановку задачі планування відбиття удару повітряного противника з урахуванням її значущих характеристик.

Постановка проблеми. Військова справа за своєю специфічною спрямованістю характеризується значною кількістю задач, які потребують прийняття рішення на подальші дії. Важлива риса будь-якої задачі – той факт, що наявний ресурс, як правило, є не достатнім для повного і безумовного її вирішення, і тому виникає необхідність визначити спосіб його найкращого (оптимального) використання. Як правило, ці задачі, у свою чергу, виділяються настільки значним розміром, що прийняття правильного рішення за прийнятний час на основі одного лише досвіду часто є неможливим. Тому проблемним питанням стає коректне залучення математичного апарату у поєднанні з можливостями обчислювальної техніки для розрахунку найкращого плану дій та прийняття на його основі обґрунтованих рішень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проаналізувавши відповідні дослідження, можна зазначити, що для оцінювання ефективності протиповітряної оборони пропонується комплекс математичних моделей застосування сил та засобів протиповітряної оборони для відбиття удару повітряного противника. Пропонуються комплекси математичних моделей для відбиття удару повітряного противника по військах та об’єктах угруповання в умовах подолання противником протиповітряної оборони на широкому фронті; при подоланні протиповітряної оборони на вузькій ділянці. Особливостями значної кількості моделей є те, що кожна з них може бути використана у двох режимах: оборона або наступ [1].

Метою цієї **статті** є формалізація задачі планування відбиття удару повітряного противника та розроблення програмної реалізації методу розв’язання оптимізаційної задачі.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу відбиття удару повітряного противника. Нехай виявлено угруповання сил противника, який планує завдати авіаційний удар. Це угруповання визначається вектором важливостей засобів повітряного нападу (ЗПН)

$$\mathbf{C}_B = \left\langle c_j, j = 1...n \right\rangle. \qquad (1)$$

Важливість кожного засобу c_j повинна бути оцінена ймовірними збитками, які він може заподіяти об’єкту у разі завдання удару засобами повітряного нападу, тобто

$$\mathbf{C}_B = \left\langle c_j = a_j \cdot q_j, j = 1...n \right\rangle, \qquad (2)$$

де a_j – умовна вартість об’єкта удару для j-го ЗПН;

q_j – важливість об’єкта удару для j-го ЗПН.

Угруповання різнорідних сил з відбиття удару повітряного противника складають m видів засобів ураження (ЗУ) цілей-ЗПН, заданих відповідно вектором

$$\mathbf{B}_B = \left\langle b_i, i = 1...m \right\rangle, \qquad (3)$$

де b_i – кількість ЗУ i-го виду.

Залежно від умов застосування сил відбиття удару повітряного противника, а саме потрібних рубежів перехоплення, висот та швидкостей перехоплення цілей, характеристик ураження цілей, визначається матриця ймовірностей ураження

$$\mathbf{P}_B = \left\| p_{ij} \right\|_{m \times n}, \qquad (4)$$

де p_{ij} – імовірність ураження одиницею i-го ЗУ j-го ЗПН.

Якщо для i-го виду ЗУ не виконуються умови застосування по j-му ЗПН щодо рубежів, висот, швидкостей, то припускаємо, що

$$p_{ij} = 0. \qquad (5)$$

Припустимо, що засоби відбиття удару повітряного противника розподілені за цілями згідно з планом

$$\mathbf{R}_B = \left\| r_{ij} \right\|_{m \times n}, \qquad (6)$$

де r_{ij} – кількість одиниць ЗУ i-го виду, які призначені для ураження j-го ЗПН. Очевидні обмеження щодо припустимого плану

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \le b_i, \; i = 1...m. \qquad (7)$$

Бойовим ефектом дій щодо удару повітряного противника будемо вважати відвернені збитки, які б могли заподіяти сили, що завдають цей удар. Тому бойовий ефект стосовно j-го ЗПН за умови, що в "середині" i-го виду ЗУ одиниці r_{ij} однорідні, є

$$w_j(r_{ij}, i=1...m) = c_j\left[1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{r_{ij}}\right],\ j=1...n. \quad (8)$$

Сумарний бойовий ефект дій з відбиття удару повітряного противника при плані розподілу $\mathbf{R}_B$ становитиме

$$WS(\mathbf{R}_B) = \sum_{j=1}^{n} w_j(r_{ij}, i=1...m) = \sum_{j=1}^{n} c_j\left[1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{r_{ij}}\right]. \quad (9)$$

Втрати потенціалу боєздатності угруповання сил та засобів протиповітряної оборони за час бойових дій TS_B складають

$$BS(\mathbf{R}_B) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right) TS_B. \quad (10)$$

Ефективність бойових дій з відбиття удару повітряного противника оцінюється співвідношенням бойового ефекту і втрат потенціалу

$$ES(\mathbf{R}_B) = \frac{WS(\mathbf{R}_B)}{BS(\mathbf{R}_B)}. \quad (11)$$

Загальна задача планування відбиття удару повітряного противника полягає у розробленні такого (оптимального) плану розподілу ЗУ за цілями, який максимізує ефективність дій з відбиття удару повітряного противника.

Залежно від умов застосування (реальних обмежень) загальна задача має дві інтерпретації.

1. "Пряма" задача – на множині припустимих планів розподілу ЗУ за цілями-ЗПН $\{\mathbf{R}_B\}_{np}$, кожен з яких

$$\mathbf{R}_{Bnp} = \|r_{ij}\|_{m\times n} \in \{\mathbf{R}_B\}_{np} \quad (12)$$

і задовольняє обмеження на втрати боєздатності

$$TS_B\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right) \le BS^{npun}, \quad (13)$$

знайти такий (оптимальний) план

$$\mathbf{R}_{0np} = \|r_{0ij}\| m\times n, \quad (14)$$

який максимізує бойовий ефект відбиття авіаційного удару

$$WS(\mathbf{R}_{0np}) = \max_{\{\mathbf{R}_B\}_{np}} WS(\mathbf{R}_B) = \sum_{j=1}^{n} w_j(r_{0ij}). \quad (15)$$

При цьому бойова ефективність буде максимальною

$$ES(\mathbf{R}_{0np}) = \max\frac{WS(\mathbf{R}_B)}{BS^{npun}} = \max ES(\mathbf{R}_B). \quad (16)$$

2. "Обернена" задача – на множині припустимих планів розподілу ЗУ за цілями-ЗПН $\{\mathbf{R}_B\}_{об}$, кожен з яких

$$\mathbf{R}_{Boб} = \|r_{ij}\|_{m\times n} \in \{\mathbf{R}_B\}_{об} \quad (17)$$

і задовольняє обмеження на потрібний бойовий ефект

$$WS(\mathbf{R}_{Boб}) = \sum_{j=1}^{n} w_j(r_{ij}, i=1...m) \ge WS^{nomp}, \quad (18)$$

знайти такий (оптимальний) план

$$\mathbf{R}_{0oб} = \|r_{0ij}\|_{m\times n}, \quad (19)$$

який мінімізує витрати потенціалу боєздатності (складу ЗУ):

$$BS(\mathbf{R}_{0oб}) = \min_{\{\mathbf{R}_B\}_{об}} BS(\mathbf{R}_B) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\right)\cdot TS_B. \quad (20)$$

При цьому бойова ефективність також максимальна:

$$ES(\mathbf{R}_{0oб}) = \frac{WS^{nomp}}{\min\limits_{\{\mathbf{R}_B\}} BS} = \max_{\{\mathbf{R}_B\}} ES(\mathbf{R}_B). \quad (21)$$

Можна побачити, що пряма та обернена задачі планування відбиття удару повітряного противника у формальній постановці аналогічні, що дає можливість вирішувати їх єдиною процедурою математичного програмування.

Виберемо метод розв'язування розглянутої задачі планування відбиття удару повітряного противника.

Оскільки функція бойового ефекту (9) є нелінійною й опуклою і на значення аргументу r_{ij} накладається умова дискретності, а саме цілочисельності, то для розв'язання задачі розподілу виберемо дискретний метод опуклого програмування – метод "максимального елемента".

Згідно з лемою Гіббса умовою оптимальності матричного аргументу $\mathbf{R}$ є "однаковість" значень похідних

$$\frac{d}{dr_{ij}}\{w_j(r_{ij})\} \approx \lambda. \quad (22)$$

Переходячи до кінцевих різниць, отримаємо

$$\frac{d}{dr_{ij}}\{w_j(r_{ij})\} \approx \frac{w_j(r_{ij}) - w_j(r_{ij}-1)}{r_{ij}-(r_{ij}-1)} = \lambda. \quad (23)$$

Остаточно маємо матрицю кінцевих різниць

$$\mathbf{D} = \left\| d_{ij} = \frac{w_j(r_{ij}) - w_j(r_{ij} - 1)}{1} = \lambda \right\|_{m \times n} . \quad (24)$$

Процедура пошуку оптимального матричного аргументу $(\mathbf{R_0})$ полягає у тому, що з використанням властивості опуклості функцій $w_j(r_{ij})$, коли кінцеві різниці $d_{ij}(r_{ij})$ при збільшенні аргументу r_{ij} зменшуються, починаючи з перших кінцевих різниць, у яких умовний аргумент $r_{ij} = 1$, шукають серед них "максимальну" d_{sr} і її аргумент r_{sr} збільшують (фактично) на 1, зменшуючи значення цієї і залежних від неї різниць щодо цілі "*r*" (стовпця *r*), тобто поступово наближуючи їх до деякого однакового значення λ. Дійсно, перші ($r_{ij} = 1$), кінцеві різниці є, очевидно, найбільші:

$$\left\| d_{ij}(r_{ij} = 1) = c_j(1 - q_{ij}) - 0 \right\|_{m \times n} = \mathbf{D} . \quad (25)$$

Якщо на матриці $\mathbf{D}$ максимальною є d_{sr}, то на даному кроці пошуку фактично призначають "одиницю" ЗУ *s*-типу на ціль *r*-го типу

$$r_{sr} := r_{sr} + 1 \quad (26)$$

і перераховують *r*-й стовпець матриці $\mathbf{D}$ згідно з "новими" значеннями різниць стовпця

$$d_{ir} = c_r \cdot (1 - q_{ir} q_{sr}) - c_r \cdot (1 - q_{sr}) = c_r \cdot (1 - q_{ir}) \cdot q_{sr}, \quad (27)$$

$i = 1...m$.

Таким чином, нові значення різниць *r*-го стовпця

$$d_{ir} := d_{ir} \cdot q_{sr}, \ i = 1...m , \quad (28)$$

тобто через умову $(q_{sr} < 1)$ вони завжди менші за попередні.

Аналогічним чином на кожному наступному кроці процедури пошуку $(\mathbf{R_0})$ здійснюється "підрівнювання" кінцевих різниць до вичерпання запасу ресурсів за типами $b_i, i = 1...m$ (пряма задача) чи до накопичення суми кінцевих різниць, що "підрівнювалися", яка дорівнює потрібному бойовому ефекту (обернена задача).

Висновки

Таким чином, одержано математичну постановку задачі планування відбиття удару повітряного противника з урахуванням її значущих характеристик. Вона звелася до прямої та оберненої оптимізаційної задач, поетапне розв'язання яких дає змогу виробити оптимальний план дій.

Постановка задачі та єдиний вид функцій бойового ефекту дозволяють застосувати один загальний метод оптимізації і реалізувати його в єдиній обчислювальній процедурі. Слід додати, що така постановка задачі остаточно не вичерпує можливості урахування інших значущих характеристик дій, що плануються. Залежно від потрібного рівня деталізації конкретної практичної задачі урахування додаткових характеристик можливе, починаючи з більш детального визначення векторів стану сторін.

Список використаних джерел

Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1981. – 488 с.

Стаття надійшла до редакції 13.11.2010 р.