

УДК 517.977.1

І. С. Катеринчук, Р. В. Рачок, Д. А. Мул

## ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ, АРИФМЕТИЧНИХ І ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ПРАВИЛ ЇХ УРАХУВАННЯ В ОПЕРАТИВНО-ТАКТИЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

*Запропоновано способи застосування апарату нечітких чисел у методиках та математичних моделях процесів з функціональною нестохастичною невизначеністю. Визначено функції належності нечітких чисел, арифметичних і тригонометричних функцій та правила їх урахування під час проведення оперативно-тактичних розрахунків.*

**Постановка проблеми.** Моделювання оперативно-службових дій органів охорони кордону в процесі прийняття рішень характеризується наявністю невизначеності, яка може мати місце внаслідок непрогнозованості дій порушників прикордонного законодавства, неможливості передбачити дії прикордонників у ході несення служби, недостатньої достовірності даних обстановки або їх недостатньої повноти, можливості руйнування інформації в каналах передачі тощо. Неврахування умов невизначеності під час проведення оперативно-тактичних розрахунків параметрів управлінських рішень призводить до спрощення (ідеалізації) отриманих результатів, які, у свою чергу, не повною мірою відповідають вимогам щодо ефективності підтримки прийняття рішень на охорону державного кордону.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідженню прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності присвячено низку праць [1 – 4]. Їх аналіз свідчить про необхідність узагальнення та вибору єдиного підходу до врахування невизначеності у процесі проведення оперативно-тактичних розрахунків.

Під час охорони кордону характерна наявність одночасно різномірної інформації: точкових вимірів і значень вихідних даних для прийняття рішень; припустимих інтервалів їхньої зміни; статистичних законів розподілу для окремих величин; лінгвістичних критеріїв й обмежень, отриманих від фахівців-експертів та ін.

Застосування деяких математичних методів (інтервального аналізу, статистичних методів, теорії ігор, детермінованих моделей тощо) для прийняття рішень в умовах невизначеності дозволяє адекватно відтворити у моделі лише окремі види даних і призводить до безповоротної втрати інформації інших їх типів.

За браком інформації для застосування ймовірнісних моделей та у зв'язку з труднощами

оперування випадковими величинами й особливо в умовах нестохастичної функціональної невизначеності важливого значення набуває використання інтервальних величин у рамках теорії нечітких множин.

**Мета статті.** З огляду на характер невизначеності при моделюванні оперативно-службових дій та переваги методів теорії нечітких множин для її формалізації виберемо як основний спосіб формалізації вихідних даних використання апарату нечітких чисел. *Метою статті* є визначення функцій належності нечітких чисел, арифметичних і тригонометричних функцій та правил їх урахування у математичних моделях оперативно-тактичних розрахунків.

**Виклад основного матеріалу.** В умовах завдання, яке вирішується, на основі зібраного в органі управління статистичного матеріалу або завдяки опитуванню групи експертів можна визначити інтервали ймовірної зміни величин вихідних даних і подати їх у вигляді нечітких чисел з відповідними функціями належності.

Як свідчить аналіз праць [5 – 8], є два основних способи ведення операцій над нечіткими числами: з використанням принципу узагальнення Заде; з використанням  $\alpha$ -рівневого принципу узагальнення.

Використання принципу узагальнення Заде пов'язано з такими труднощами:

– великий обсяг обчислень – кількість елементів результуючої нечіткої множини, які необхідно опрацювати, дорівнює  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , де  $r_i$  – кількість точок, на яких задано  $i$ -й нечіткий аргумент,  $i = \overline{1, n}$ ;

– складність побудови верхньої лінії, яка огинає елементи результуючої нечіткої множини.

Ураховуючи наведене вище, пропонується як основний вибрати  $\alpha$ -рівневий принцип узагальнення. У разі його застосування нечіткі числа подаються у вигляді розкладань за  $\alpha$ -рівневими множинами:

$$\tilde{x} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha), \quad (1)$$

де  $\underline{x}_\alpha$  ( $\overline{x}_\alpha$ ) – мінімальне (максимальне) значення  $\tilde{x}$  на  $\alpha$ -рівні.

Множиною  $\alpha$ -рівня ( $\alpha$ -перетином) [9] нечіткої множини  $\tilde{y}$  називають чітку підмножину універсальної множини  $U$ , елементи якої мають степінь належності, який більше або дорівнює  $\alpha$ :

$$Y_\alpha = \{u: \mu_Y(u) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1] \quad (2)$$

Значення  $\alpha$  називають  $\alpha$ -рівнем.

Відповідно значення нечіткого числа  $\tilde{y}$  для  $\alpha$ -рівневого принципу узагальнення набере вигляду

$$\tilde{y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha), \quad (3)$$

$$\underline{y}_\alpha = \inf_{x_{i,\alpha} \in [\underline{x}_{j,\alpha}, \overline{x}_{j,\alpha}]} (f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha}))$$

$$\text{та } \overline{y}_\alpha = \sup_{x_{i,\alpha} \in [\underline{x}_{j,\alpha}, \overline{x}_{j,\alpha}]} (f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha})), \quad j = \overline{1, n}.$$

Застосування  $\alpha$ -рівневого принципу узагальнення зводиться до розв'язання для кожного  $\alpha$ -рівня такої задачі оптимізації: знайти максимальне і мінімальне значення функції  $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  за умови, що аргументи будуть приймати значення з відповідних  $\alpha$ -рівневих множин. Кількість  $\alpha$ -рівнів вибирають таким чином, щоб забезпечити необхідну точність обчислень.

Отже, виникає завдання розроблення правил виконання основних арифметичних операцій над нечіткими числами.

Дослідження виконання арифметичних операцій над позитивними нечіткими числами та аналіз літератури [7 – 10] дозволили сформулювати основні правила виконання арифметичних операцій, які наведені у табл. 1.

Певний інтерес своєю неординарністю становить вираз виду  $\tilde{y} = \frac{1}{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}$ . Результати

дослідження цього виразу наведені у табл. 2.

Як видно з табл. 2, вигляд результату знаходження мінімального та максимального значення функції  $\tilde{y}$  залежить від характеру нечітких чисел (функцій належності нечітких чисел).

Результати дослідження вигляду тригонометричних функцій від нечітких аргументів наведені у табл. 3.

Таблиця 1

*Правила виконання арифметичних операцій з нечіткими числами для деяких арифметичних виразів*

Арифметичний вираз	$\underline{y}$	$\overline{y}$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 + \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 - \overline{x}_2$	$\overline{x}_1 - \underline{x}_2$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$
$\tilde{y} = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2}$	$\frac{\underline{x}_1}{\overline{x}_2}$	$\frac{\overline{x}_1}{\underline{x}_2}$
$\tilde{y} = \frac{1}{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}$	$\frac{1}{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$	$\frac{1}{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}$
$\tilde{y} = \frac{1}{\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2}$	$\frac{1}{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2}$	$\frac{1}{\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2}$

**Примітка.**  $\underline{y}, \overline{y}$  – максимальне і мінімальне значення функції  $\tilde{y}$  на  $\alpha$ -рівні.

Таблиця 2

*Верхні та нижні оцінки функції виду*

$$\tilde{y} = \frac{1}{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2} \text{ від нечітких аргументів}$$

Графіки функцій належності нечітких чисел $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$	$\underline{y}$	$\overline{y}$
	$\frac{1}{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}$	$\frac{1}{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}$
	$\frac{1}{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}$	$\frac{1}{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}$
	$\frac{1}{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}$	$\frac{1}{\overline{x}_1 - \underline{x}_2}$
	$\frac{1}{\overline{x}_1 - \underline{x}_2}$	$\frac{1}{\overline{x}_1 - \underline{x}_2}$
	$\frac{1}{\overline{x}_1 - \underline{x}_2}$	$\frac{1}{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}$

Таблиця 3

Верхні та нижні оцінки тригонометричних функцій від нечітких аргументів

Функція	$\underline{y}$	$\overline{y}$
$\tilde{y} = \sin \tilde{x}$	$\underline{x} - \frac{\overline{x^3}}{3!} + \frac{\overline{x^5}}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{\overline{x^{2n-1}}}{(2n+1)!} + \dots$	$\overline{x} - \frac{\underline{x^3}}{3!} + \frac{\underline{x^5}}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{\underline{x^{2n-1}}}{(2n+1)!} + \dots$
$\tilde{y} = \cos \tilde{x}$	$\underline{x} - \frac{\overline{x^2}}{2!} + \frac{\overline{x^4}}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{\overline{x^{2n}}}{2n!} + \dots$	$\overline{x} - \frac{\underline{x^2}}{2!} + \frac{\underline{x^4}}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{\underline{x^{2n}}}{2n!} + \dots$
$\tilde{y} = \operatorname{tg} \tilde{x}$	$\underline{x} + \frac{1}{3}\overline{x^3} + \frac{2}{15}\overline{x^5} + \frac{17}{315}\overline{x^7} + \dots$ $+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n} }{(2n)!}\overline{x^{2n-1}} + \dots$	$\overline{x} + \frac{1}{3}\underline{x^3} + \frac{2}{15}\underline{x^5} + \frac{17}{315}\underline{x^7} + \dots$ $+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n} }{(2n)!}\underline{x^{2n-1}} + \dots$

**Дослідження впливу нечітких вихідних даних на результати оперативно-тактичних розрахунків.** Крім оцінки достовірності та оперативності моделювання слід дослідити, як впливає нечіткість вихідних даних на характер нечіткості результату моделювання. Для цього проведемо дослідження, у процесі яких проаналізуємо залежність імовірності виявлення порушників законодавства з прикордонних питань від нечіткого характеру вихідних даних. Розглянемо вираз [4]

$$\tilde{P} = 1 - e^{-\frac{2\tilde{r}\tilde{V}t}{\tilde{S}}}, \quad (4)$$

де  $\tilde{r}$  – нечітка величина дальності виявлення порушників;  $\tilde{V}$  – нечітка величина швидкості руху прикордонного патруля;  $t$  – час патрулювання;  $\tilde{S}$  – нечітка величина площі району патрулювання.

нечіткої величини  $\tilde{P}$  будемо поступово змінювати величину коефіцієнтів нечіткості кожного нечіткого числа. Результати проведених обчислень для різної кількості нечітких чисел у формулі (4) наведені на рис. 1.

З аналізу графіків (рис. 1) можна зробити такі висновки:

- у разі збільшення коефіцієнтів нечіткості нечітких чисел збільшується коефіцієнт нечіткості самої функції;
- при збільшенні кількості вихідних даних, які мають нечіткий характер та можуть бути подані нечіткими числами, коефіцієнт нечіткості функції збільшується за експонентою;
- під час оцінювання коефіцієнта нечіткості функції потрібно враховувати те, що від арифметичних дій над нечіткими числами порізному впливає на коефіцієнт невизначеності.

Таким чином, в задачах моделювання оперативно-службових дій для врахування

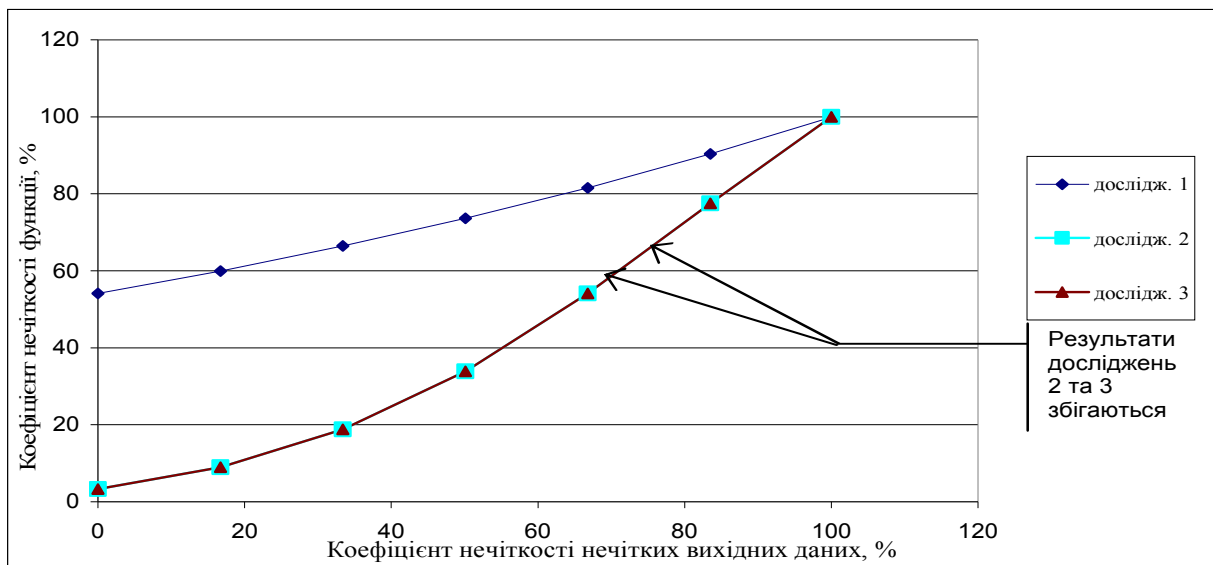


Рис. 1. Графік залежності коефіцієнта нечіткості функції  $\tilde{P}$  від коефіцієнтів нечіткості нечітких вихідних даних, %

невизначеного характеру умов функціонування тієї чи іншої моделі, для отримання найбільш реалістичних діапазонів величин, які розраховуються, виявляється доцільним застосовувати елементи теорії нечітких множин, зокрема апарат нечітких чисел.

У подальшому дослідженні необхідно враховувати об'єктивно існуючу невизначеність, яка є не лише в моделях оперативно-службових дій, а й має місце на етапі створення спеціального математичного та програмного забезпечення.

### **Висновки**

Аналіз виду нечіткої функції та зазначені вище правила виконання арифметичних операцій дають змогу знайти мінімальне і максимальне значення нечіткої функції від нечітких аргументів по кожному з  $\alpha$ -рівнів і тим самим визначити множини всіх можливих значень параметра, який моделюється.

З урахуванням наведених підходів до нечітких вихідних даних розраховуються значення значущих параметрів організації дій у прикордонному пошуці, а саме: кількість особового складу у пошукових групах; відстань між спостерігачами; середня швидкість руху пошукової групи; швидкість руху резервної групи; швидкість розгортання пошукової групи у бойовий порядок на рубежі блокування; припустимий час для прийняття рішення; тривалість пошуку; площа району пошуку тощо.

### **Список використаних джерел**

1. Розробка математичного та програмно-алгоритмічного забезпечення автоматизованої інформаційно-розрахункової системи оперативно-тактичних розрахунків щодо підтримки рішень на охорону державного кордону : звіт про НДР / НАПВУ. – Інв. № 205–1007 I . – Хмельницький, 2005. – 58 с.

2. Усовершенствование методики оперативно-тактических расчетов планирования и оценки эффективности огневого поражения противника в

условиях неопределенности : отчет о НИР/АПВУ. – Інв. № 098-0048И. – Хмельницький, 1999. – 139 с.

3. Застосування теорії нечітких множин в процесах прийняття рішень посадовими особами Прикордонних військ України : звіт про НДР / НАПВУ. – Інв. № 200-09-101. – Хмельницький, 2000. – 68 с.

4. Литвин М. М. Методики оперативно-тактичних розрахунків / М. М. Литвин, А. Б. Мисик, І. С. Катеринчук. – Хмельницький : Вид. НАДПСУ, 2004. – 82 с.

5. Рачок Р. В. Використання апарату нечітких чисел для врахування невизначеності вихідних даних в оперативно-тактичних розрахунках / Р. В. Рачок, Д. А. Мул // Зб. наук. пр. № 35. Ч. II. – Хмельницький : Вид. НАДПСУ. – 2006. – С. 241–245.

6. Рачок Р. В. Методика врахування невизначеності при моделюванні оперативно-службових дій органу охорони кордону в системі підтримки прийняття рішень / Р. В. Рачок, Д. А. Мул // Труды III наук.-практ. конф. “Пріоритетні напрямки розвитку телекомунікаційних систем спеціального призначення”. – К. : ВІНІ НТУУ “КПІ”, 2006. – С. 81–85.

7. Герасимов Б. М. Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка состояния / Б. М. Герасимов, М. М. Дивизинюк, И. Ю. Субач. – Севастополь : Изд. центр СНИЯЭиП, 2004. – 320 с.

8. Толубко В. Б. Методологічні основи проектування прикладного програмного забезпечення для автоматизованих систем управління військового призначення / В. Б. Толубко, А. І. Сбітнев, О. Ю. Пермяков. – К. : НАОУ, 2004. – 188 с.

9. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 396 с.

10. Борисов А. Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркурьева. – М. : Радио и связь, 1989. – 304 с.

*Стаття надійшла до редакції 12.11.2008 р.*