

В. П. Городнов

МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРОТИПОВІТРЯНОГО БОЮ УГРУПОВАННЯ ЗЕНІТНИХ РАКЕТНИХ ВІЙСЬК

На реальному прикладі із застосуванням спеціального методу виявлено істотні властивості та внутрішній закон протиповітряного бою угруповання зенітних ракетних військ. Вибрано статистично обґрунтований математичний апарат моделювання у класі марковських процесів із безперервним часом та дискретними станами. Розроблено модель з аналітичним описом внутрішнього закону бою, перевірено її адекватність реальному бою та знайдено оцінку точності прогнозування результатів бою.

Ключові слова: протиповітряна оборона, угруповання зенітних ракетних військ, марковські процеси, моделювання.

Постановка проблеми. У ході військових дій захист важливих об'єктів держави та угруповань військ від ударів засобів повітряного противника покладається на зенітні ракетні війська у складі зенітних ракетних бригад, полків та підрозділів, що розгортаються у бойові порядки у позиційних районах і формують угруповання ЗРВ.

Бойове завдання з протиповітряної оборони (ППО) угруповання ЗРВ виконує у ході протиповітряного бою як сукупності послідовних і одночасних протиповітряних боїв (вогневих контактів) зенітних ракетних дивізіонів (зрдн) із засобами повітряного нападу (ЗПН) противника. Склад учасників, кількість та параметри вогневих контактів у просторі й часі бою, а також можливі втрати сторін наперед не відомі (випадкові).

Однак щоразу під час побудови бойового порядку угруповання ЗРВ виникає практичне завдання прогнозу результатів протиповітряного бою, а саме втрат ЗПН противника та зенітних ракетних комплексів (ЗРК) угруповання, кількості вогневих контактів, достатності запасу зенітних керованих ракет (ЗКР) та складу зрдн для відбиття першого і наступних ударів ЗПН противника.

У результаті виникає актуальна проблема пошуку стійкого внутрішнього закону протиповітряного бою і на його основі – побудови моделі для прогнозування значень наведених показників.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. За складом математичних інструментів, що застосовуються, напрями відомих праць стосовно моделювання дій зенітних ракетних комплексів ППО і протиракетної оборони можна умовно поділити на кілька категорій. Так, під час побудови моделей оцінювання ефективності протиповітряної і протиракетної оборони наземних об'єктів [1–4] та угруповання надводних кораблів [5] використано відомий математичний апарат теорії масового обслуговування [1, 5], теорії ігор [2], мереж Петрі [4], а також ідеї гетерогенних мереж. При цьому автори інтуїтивно вважають, що вибраний ними математичний апарат відповідає процесам протиповітряного бою угруповання ЗРВ. На користь такого висновку наводяться результати імітаційного моделювання [2, 3, 4].

Однак у згаданих математичних методах не передбачено врахування основного чинника протиповітряного бою – можливості ураження зенітних ракетних комплексів, що позбавляє зазначені моделі адекватності реальним процесам бою.

Мета статті – виявлення внутрішнього закону протиповітряного бою угруповання зенітних ракетних військ і на його основі – розробка й оцінка адекватності моделі як інструменту для прогнозу значень наведених показників результатів бою.

Виклад основного матеріалу. Для досягнення мети використаємо елементи спеціальної технології розроблення і гарантованого отримання моделей [7] та опис реального протиповітряного бою 30.06.1970 р. угруповання ЗРВ у складі трьох ЗРК SA-3 і тринадцяти ЗРК SA-2, що було посилене підрозділами переносних ЗРК у зоні Суецького каналу (рисунок 1, таблиця 1).

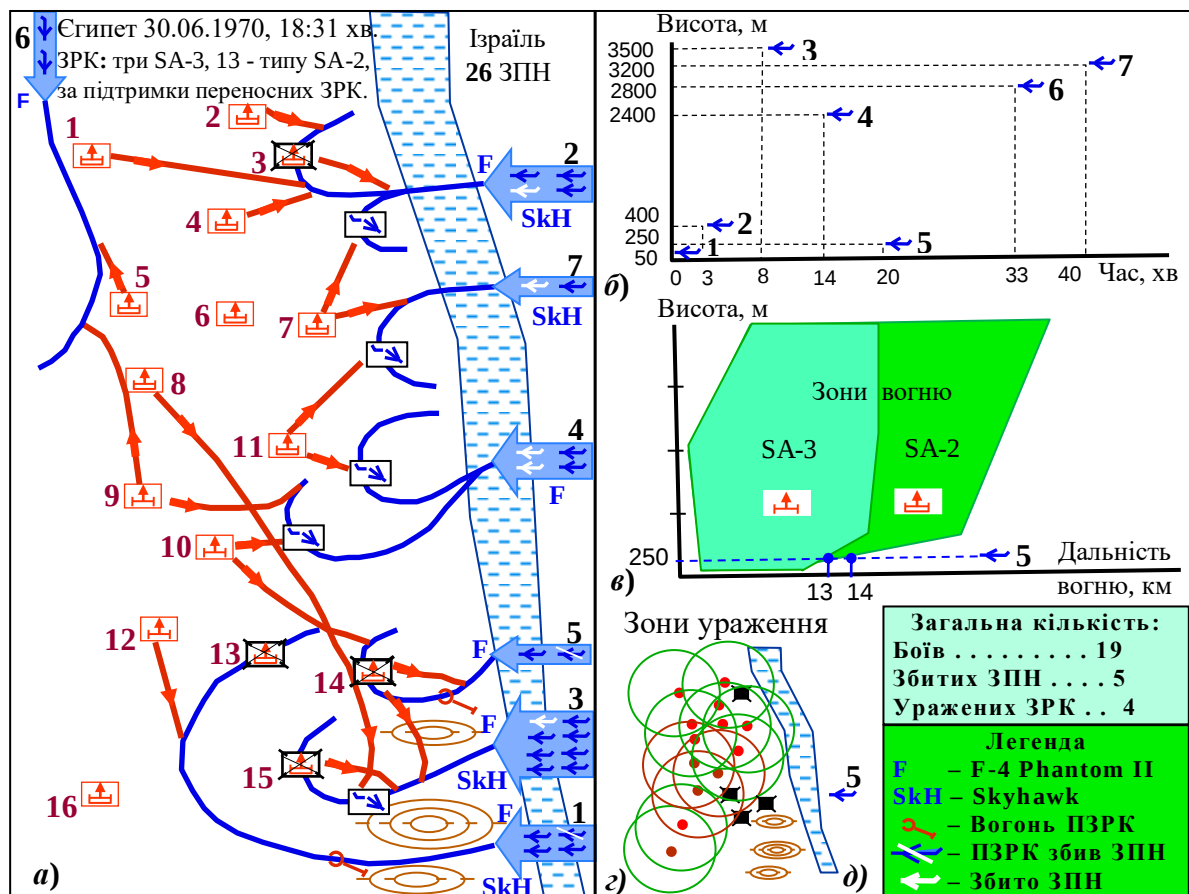


Рисунок 1 – Схема і параметри реального бою з протиповітряної оборони 30.06.1970 р. у зоні Суецького каналу: *а* – карта-схема динаміки бою; *б* – висотно-часова діаграма удару ЗПН; *в* – структура зон ураження ЗРК; *г* – загальна зона ураження підрозділів ЗРК на висоті польоту ЗПН № 5; *д* – кінцеві результати бою та позначення на карті-схемі

Коротко простежимо розвиток бою. Перша група ЗПН у складі 4 літаків (2 – «Скайхок» і 2 – «Фантом») на висоті 50 м під прикриттям рельєфу місцевості своєчасно виявлена не була, увійшла до району дислокації угруповання. Один літак був збитий переносним ЗРК, другий – безуспішно обстріляний ЗРК SA-3 № 12. Неуражені літаки першої групи атакували і вразили ЗРК SA-2 № 13 та вийшли із зони вогню угруповання ЗРВ.

У цей час підрозділи угруповання ЗРВ були приведені у бойову готовність. Тому друга, така ж група літаків, але яка увійшла в зону вогню угруповання через деякий час на протилежному фланзі і на висоті 400 м, була зустрінута вогнем двох зрдн SA-2 (№ 3 і № 7). Один із літаків нападників було збито дивізіоном SA-2 № 7. Його напарник відмовився від виконання бойового завдання, розвернувся і стрімко вийшов із зони вогню угруповання. Два літаки, що залишилися, були безуспішно обстріляні дивізіонами SA-2 № 4 і SA-2 № 1, продовжили політ, атакували і вразили ЗРК SA-2 № 3; потім вони були безуспішно обстріляні ЗРК SA-2 № 2 і стрімко вийшли із зони вогню угруповання ЗРВ.

Таблиця 1 – Оцінки поточних та інтегральних параметрів* бою (див. рисунок 1)

№	Моменти часу подій бою угруповання ЗРВ, хв			Номери учасників бою		Втрати у вогневих контактах	№	Інтегральні параметри протиповітряного бою угруповання ЗРВ	
	Поч-к (&ЗПН)	Кінець	$\Delta t_{\text{ЗРК}}$	ЗРК	ЗПН				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,50	1,23	0,73	ПЗРК	1	1 ЗПН	25	$n_{\text{в.к}}$	22
2	2,02	2,93	0,91	12	1	—	26	$n_{\text{вр.ЗРК}}$	4
3	3,28	3,63	0,35	13	1	ЗРК № 13	27	$N_{\text{зб.л}}$	5

кінець Таблиці 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	3,02	3,70	0,68	3	2	—	28	P^*	0,181818
5	2,96	4,03	1,07	7	2	1 ЗПН	29	$P_{зб.л}$	0,227273
6	3,47	4,13	0,66	4	2	—	30	n_0	16
7	2,40	4,30	1,90	1	2	—	31	$D(n_{в.к})$	0,011364
8	3,81	4,43	0,62	3	2	ЗРК № 3	32	$D(n_{вр.ЗРК})$	0,062500
9	4,53	4,93	0,40	2	2	—	33	$D(N_{зб.л})$	0,058000
10	7,74	8,63	0,89	14	3	—	34	$n_{в.к} \infty$	88
11	8,42	8,73	0,31	15	3	—	35	$N_{зб.л} \infty$	20
12	6,84	9,10	2,26	8	3	1 ЗПН	Оцінки за внутрішнім законом		
13	8,82	9,43	0,61	15	3	ЗРК № 15	36	$w(44)$	0,251485
14	14,26	15,11	0,85	11	4	1 ЗПН	37	$n_{в.к}$	22,130652
15	15,23	15,80	0,57	10	4	1 ЗПН	38	$n_{вр.ЗРК}$	4,023755
16	14,70	16,23	1,53	9	4	—	39	$N_{зб.л}$	5,029694
17	20,08	20,40	0,32	14	5	—	40	$\Delta, \%$	0,593873
18	20,60	20,60	0,25	ПЗРК	5	1 ЗПН	41	$\chi^2_{\text{Експ.ЗРК}}$	3,945236
19	20,63	21,00	0,37	14	5	ЗРК № 14	42	$\chi^2_{\text{Норм.ЗРК}}$	7,597282
20	19,66	21,53	1,87	10	5	—	43*	$\chi^2_{\text{Експ.ЗПН}}$	1,675774
21	34,08	34,47	0,39	5	6	—	44*	$\chi^2_{\text{Норм.ЗПН}}$	32,963587
22	33,46	35,10	1,64	9	6	—	45*	$\alpha_{\text{рівень}}$	0,050000
23	40,25	40,50	0,25	7	7	—	46*	$\chi^2_{\text{Критичн}} (r=1, \alpha)$	3,890000
24	39,92	41,10	1,18	11	7	1 ЗПН	47*	$\chi^2_{\text{Критичн}} (r=2, \alpha)$	5,990000

* **Примітка.** $\chi^2_{\text{Норм.ЗРК}} = 7,597 > 3,89$; $\chi^2_{\text{Норм.ЗПН}} = 32,96 > 3,89$; $a_{\Delta} = (0,02; 0,263; 0,4; 1,08; 6,83)$

$\chi^2_{\text{Експ.ЗРК}} = 3,945 < 5,99$; $\chi^2_{\text{Експ.ЗПН}} = 1,675 < 5,99$; $b_{\Delta} = (0,25; 0,53; 0,84; 1,34; 2,26)$.

Подальший розвиток бою можна простежити за картою-схемою (рисунк 1, а), за висотно-часовою діаграмою (рисунк 1, б) та за таблицею 1. Щоразу, залежно від висоти польоту повітряного ЗПН, змінювалася дальність зони вогню кожного ЗРК відповідно до його характеристик (рисунк 1, в). Це призводило до змін коефіцієнта перекриття зон ураження ЗРК у загальній зоні вогню угруповання (рисунк 1, г) та ступеня доступності ЗПН для ураження засобами ЗРК угруповання.

Із невеликою перервою бій тривав 44 хв. У результаті (рисунк 1, д) зрід угруповання ЗРВ провели 22 вогневих контакти. Зі складу 26 літаків противника 5 ЗПН було збито підрозділами SA-2 і SA-3, два літаки збито засобами ПЗРК. Повітряному противникові вдалося вразити 4 ЗРК.

Розглянутий опис (рисунк 1, таблиця 1) дає змогу виділити такі суттєві особливості протиповітряного бою угруповання ЗРВ.

1. Засоби повітряного нападу діяли групами із заздалегідь не відомим (випадковим для угруповання ЗРВ) складом, із заздалегідь не відомими місцем і часом входу в зону вогню окремих зрід.

2. Дальність зони вогню кожного ЗРК визначалася його характеристиками (рисунк 1, в) і змінювалася щоразу залежно від висоти польоту ЗПН, що призводило до непередбачуваних змін загальної зони вогню угруповання (рисунк 1, г) та її коефіцієнта перекриття.

3. Літаки противника у кращому випадку виконували одну атаку ЗРК і для повторних боїв у зоні вогню угруповання ЗРВ не залишалися.

Основним повторюваним елементом протиповітряного бою угруповання ЗРВ є протиповітряний бій (вогневий контакт) одиночних зрід із ЗПН противника. Моменти часу початку, закінчення та результати кожного вогневого контакту наперед не відомі – випадкові. При цьому результатами кожного вогневого контакту можуть бути: знищення ЗПН противника (з імовірністю $P_{зб.л}$); незнищення ЗПН противника (з імовірністю $1 - P_{зб.л}$); враження ЗРК (з імовірністю P^*); невраження ЗРК (з імовірністю $1 - P^*$); комбінації зазначених результатів.

Головними параметрами, що визначають розвиток протиповітряного бою угруповання ЗРВ, є випадкові інтервали часу між початком окремих вогневих контактів зрн і тривалість таких контактів.

Сформулюємо основні гіпотези про істотні властивості протиповітряного бою угруповання ЗРВ:

1) результат кожного вогневого контакту зрн випадковий – заздалегідь не відомий і може містити як ураження ЗПН противника, так і враження ЗРК;

2) кожний вогневий контакт зрн розвивається у часі як випадковий процес, у якого моменти початку та закінчення заздалегідь не відомі (випадкові).

Для пошуку внутрішнього закону протиповітряного бою угруповання ЗРВ використаємо зазначені гіпотези і знайдемо математичне сподівання [6] кількості $N_{зб.л.1}$ збитих ЗПН противника та вражених $n_{вр.ЗРК1}$ ЗРК у ході одного вогневого контакту:

$$N_{зб.л.1} = 1 \cdot P_{зб.л} + 0 \cdot (1 - P_{зб.л}) = P_{зб.л}, \quad n_{вр.ЗРК1} = 1 \cdot P^* + 0 \cdot (1 - P^*) = P^*. \quad (1)$$

Припустимо, що на момент бою t середня кількість вогневих контактів зрн становила $n_{в.к}$. Для зручності використовуємо повний і спрощений запис математичного сподівання $N_{зб.л}$ кількості збитих ЗПН (літаків) противника на момент t як $M[N_{зб.л}] = N_{зб.л}$ і вражених $n_{вр.ЗРК}$ ЗРК як $M[n_{вр.ЗРК}] = n_{вр.ЗРК}$, отримаємо:

$$M[N_{зб.л}] = M\left[\sum_{i=1}^{n_{в.к}} N_{зб.л.1}\right] = \sum_{i=1}^{n_{в.к}} M[N_{зб.л.1}] = \sum_{i=1}^{n_{в.к}} P_{зб.л} = P_{зб.л} \cdot n_{в.к}, \text{ тоді } N_{зб.л} = P_{зб.л} \cdot n_{в.к}; \quad (2)$$

$$M[n_{вр.ЗРК}] = M\left[\sum_{i=1}^{n_{в.к}} n_{вр.ЗРК.1}\right] = \sum_{i=1}^{n_{в.к}} M[n_{вр.ЗРК.1}] = \sum_{i=1}^{n_{в.к}} P^* = P^* \cdot n_{в.к}, \text{ тоді } n_{вр.ЗРК} = P^* \cdot n_{в.к}. \quad (3)$$

Далі врахуємо обмежену кількість n_0 ЗРК у складі угруповання ЗРВ та можливість враження кожного ЗРК вогнем ЗПН противника у кожному вогневому контакті. Для умов необмеженого запасу ЗРК у кожному зрн і необмеженої кількості ЗПН противника, що по черзі вступають у бій, спрямуємо час бою t до нескінченності (рисунок 2).

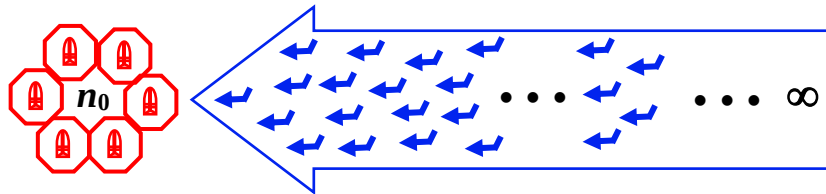


Рисунок 2 – Граничні умови протиповітряного бою

У такому разі згодом усі n_0 ЗРК у складі угруповання ЗРВ будуть вражені. У цей момент кількість вогневих контактів $n_{в.к}$ досягне граничного значення $n_{в.к.\infty}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_{вр.ЗРК}(t) = n_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n_{в.к}(t) = n_{в.к.\infty}. \quad (4)$$

Підставимо граничні значення $n_{вр.ЗРК}$ і $n_{в.к.\infty}$ із рівняння (4) у праву частину рівняння (3) і знайдемо оцінку математичного сподівання максимальної кількості вогневих контактів зрн $n_{в.к.\infty}$ із ЗПН противника до моменту поразки всіх n_0 ЗРК в угрупованні ЗРВ, а також максимальної кількості вогневих контактів для одного зрн:

$$n_0 = P^* \cdot n_{в.к.\infty}, \text{ тоді } n_{в.к.\infty} = \frac{n_0}{P^*} \text{ і } n_{в.к.\infty}(n_0 = 1) = \frac{1}{P^*}. \quad (5)$$

Неважко переконатись у правильності фізичного змісту рівняння (5). Тож якщо ймовірність поразки ЗРК під час одного вогневого контакту дорівнюватиме одиниці, тобто $P^* = 1$, то математичне сподівання кількості вогневих контактів збігатиметься з кількістю n_0 ЗРК у складі угруповання ЗРВ.

Підставивши значення $n_{\text{в.к.}\infty}$ із рівняння (5) у рівняння (2), знайдемо граничне значення математичного сподівання кількості $N_{\text{зб.л}\infty}$ збитих ЗПН противника до моменту поразки всіх ЗРК у складі угруповання ЗРВ:

$$N_{\text{зб.л}\infty} = P_{\text{зб.л}} \cdot n_{\text{в.к.}\infty} = n_0 \frac{P_{\text{зб.л}}}{P^*}. \quad (6)$$

Знайдемо відносні значення кількості вогневих контактів $n_{\text{в.к}}^*(t)$, збитих ЗПН противника $N_{\text{зб.л}}^*(t)$ і втрат ЗРК $n^*(t)$:

$$n_{\text{в.к}}^*(t) = \frac{n_{\text{в.к}}(t)}{n_{\text{в.к.}\infty}}; \quad (7) \quad N_{\text{зб.л}}^*(t) = \frac{N_{\text{зб.л}}(t)}{N_{\text{зб.л}\infty}}; \quad (8) \quad n^*(t) = \frac{n_{\text{вр.ЗРК}}(t)}{n_0}. \quad (9)$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння (3) на кількість n_0 ЗРК у складі угруповання ЗРВ і врахуємо рівності (5) та (9); отримаємо рівність відносних значень математичних сподівань кількості уражених ЗРК $n^*(t)$ та кількості вогневих контактів $n_{\text{в.к}}^*(t)$ на будь-який момент часу бою угруповання ЗРВ:

$$\frac{n_{\text{вр.ЗРК}}(t)}{n_0} = \frac{P^* \cdot n_{\text{в.к}}(t)}{n_0} = \frac{n_{\text{в.к}}(t)}{n_0 / P^*}, \text{ тоді } n^*(t) = \frac{n_{\text{в.к}}(t)}{n_{\text{в.к.}\infty}} = n_{\text{в.к}}^*(t). \quad (10)$$

Помножимо чисельник і знаменник правої частини рівняння (10) на ймовірність $P_{\text{зб.л}}$ знищення ЗПН у результаті одного вогневого контакту:

$$n^*(t) = \frac{P_{\text{зб.л}} \cdot n_{\text{в.к}}(t)}{P_{\text{зб.л}} \cdot n_{\text{в.к.}\infty}} = \frac{N_{\text{зб.л}}(t)}{N_{\text{зб.л}\infty}} = N_{\text{зб.л}}^*(t). \quad (11)$$

Рівняння (10) і (11) отримано з використанням лише допустимих операцій із математичними сподіваннями випадкових величин і на основі найбільш істотних гіпотез 1 і 2 про процеси протиповітряного бою угруповання ЗРВ. Це дає змогу сформулювати внутрішній закон протиповітряного бою: відносні значення математичних сподівань кількості вогневих контактів зрідн угруповання ЗРВ і втрат сторін дорівнюють одне одному на будь-який момент часу бою:

$$n^*(t) = N_{\text{зб.л}}^*(t) = n_{\text{в.к}}^*(t) = w(t). \quad (12)$$

При цьому абсолютні значення наведених параметрів можуть мати різні значення залежно від умов бою. Якщо під час розроблення аналітичного опису моделі бою буде знайдено рівняння (12) для відносних втрат сторін, то таку модель можна вважати адекватною реальному бою угруповання ЗРВ із точністю гіпотез 1 і 2 про найістотніші властивості процесів бою.

Повернемося до прикладу бою (рисунок 1, таблиця 1) і зазначимо, що у момент кожного закінчення вогневого контакту нормовані значення змінних величин (7), (8), (9) можуть зростати (рисунок 3) на відповідну величину D^* (таблиця 1, пункти 31, 32, 33):

$$D(n_{\text{в.к}}^*) = \frac{1}{n_{\text{в.к.}\infty}} = \frac{P^*}{n_0}, \quad D(n^*) = \frac{1}{n_0}, \quad D(N_{\text{зб.л}}^*) = \frac{1}{N_{\text{зб.л}\infty}} = \frac{P^*}{n_0 \cdot P_{\text{зб.л}}}. \quad (13)$$

Застосуємо метод найменших квадратів для розглянутого прикладу (рисунок 1) та отримаємо згладжені форми поданої залежності цих величин і величини відносних втрат $w(t)$ сторін від часу (рисунок 3):

$$\left. \begin{aligned} n_{\text{в.к}}^*(t) &= 0.0831 \cdot \ln(t) - 0.0703, & N_{\text{зб.л}}^*(t) &= 0.0886 \cdot \ln(t) - 0.0976, \\ n^*(t) &= 0.088 \cdot \ln(t) - 0.0604, & w(t) &= 0.08567 \cdot \ln(t) - 0.0761. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

З використанням виразів (5), (7), (8) і (9) можливо знайти оцінки абсолютних значень математичних сподівань кількості вогневих контактів і втрат сторін:

$$n_{\text{в.к}}(t) = w(t) \cdot n_{\text{в.к.}\infty}, \quad N_{\text{зб.л}}(t) = w(t) \cdot N_{\text{зб.л}\infty}, \quad n_{\text{вр.ЗРК}}(t) = w(t) \cdot n_0. \quad (15)$$

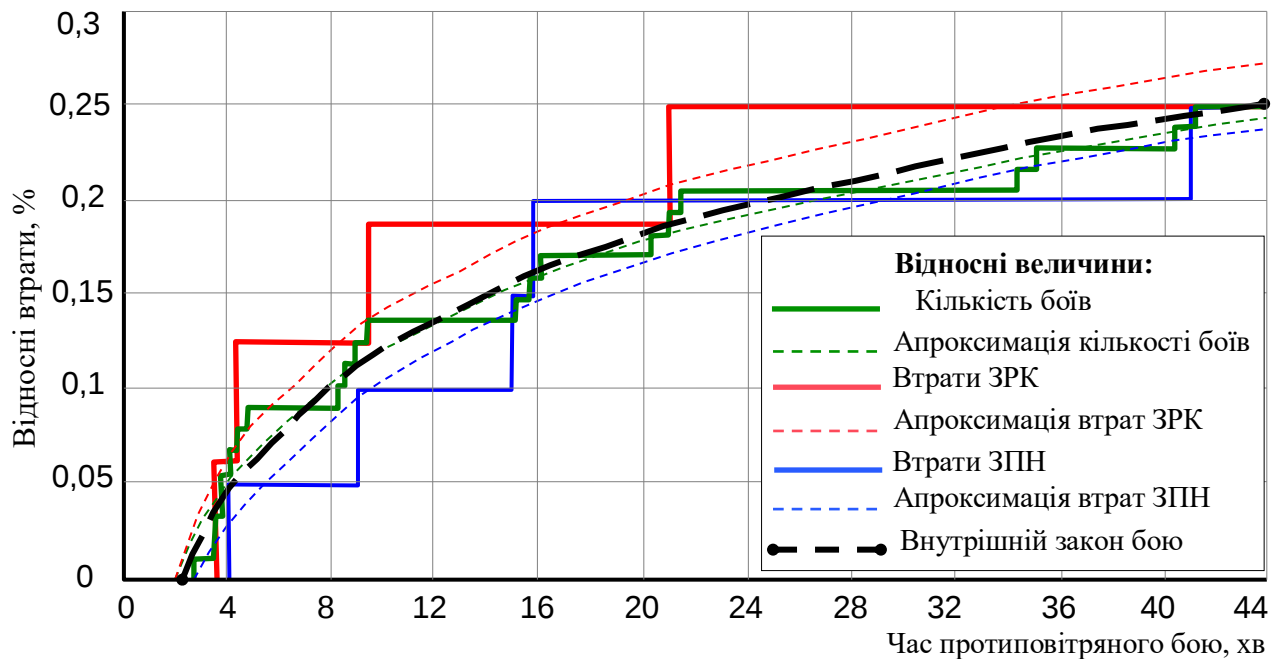


Рисунок 3 – Залежність відносних втрат сторін від часу бою

На момент часу ($t = 44$ хв) закінчення відбиття удару ЗПН можна знайти значення відносних $w(44)$ і абсолютних втрат сторін (таблиця 1, пункти 36–39), які виявляються завищеними на $\Delta = 0,59\%$ (таблиця 1, пункт 40). Проте факт порівняно точного збігу одержуваних оцінок із реальними результатами свідчить на користь коректності знайденого внутрішнього закону (12) протиповітряного бою угруповання ЗРВ.

Для практичного застосування наведеного закону (12) розробимо модель бою і знайдемо варіант його аналітичного опису.

Адекватність такої моделі можлива лише під час вибору математичного апарату, що відповідає законам розподілу головних випадкових параметрів [7], які визначають розвиток бою: інтервалів часу $\Delta t_{\text{ЗПН}i}$ між входом ЗПН до зони вогню (таблиця 1, колонка 2, $\Delta t_{\text{ЗПН}i} = t_{\text{початок}i+1} - t_{\text{початок}i}$); тривалості $\Delta t_{\text{ЗРК}i}$ циклу стрільби ЗРК (таблиця 1, колонка 4, $\Delta t_{\text{ЗРК}i} = t_{\text{кінець}i} - t_{\text{початок}i}$).

За умовами бою конкуруючими є нормальний і показовий (експоненційний) закони розподілу. Результати їхнього оцінювання в кожній вибірці випадкових величин із межами інтервалів a_{Δ} для удару ЗПН та b_{Δ} для циклів стрільби ЗРК і з відповідним числом ступенів свободи r , за критерієм Пірсона (таблиця 1, пункти 41–47; примітка – критерій χ^2) із рівнем значущості $\alpha_{\text{рівень}} = 0,05$, визначаємо необхідність відкинути гіпотезу про їх нормальний розподіл і прийняти гіпотезу про їх показовий (експоненційний) інтегральний закон розподілу. У результаті модель бойових дій (послідовності вогневих контактів) угруповання ЗРВ слід будувати у класі марковських процесів із безперервним часом і з дискретними станами.

На першому кроці, з огляду на обмежений допустимий обсяг статті, побудуємо модель для ключового елемента відбиття удару ЗПН – для послідовності вогневих контактів одноканального щодо повітряної цілі ЗРК із потоком одиночних ЗПН інтенсивності I ЗПН на хвилину. Позначимо можливі стани ЗРК у бою символом S_{ij} , де перший індекс i використаємо для вказання кількості вражених ЗРК у цьому стані; другий індекс j – для зазначення кількості ЗПН противника, по яких ведеться вогонь у цьому стані.

Отримаємо граф моделі протиповітряного бою окремого зрдн (рисунок 4), де перехід зі стану S_{00} у стан S_{01} можливий у разі виявлення чергового ЗПН противника і характеризується інтенсивністю (частотою) вогневих контактів I .

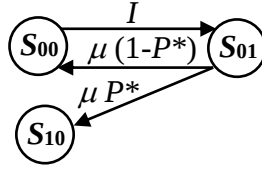


Рисунок 4 – Граф найпростішої моделі протиповітряного бою одиночного зенітного ракетного дивізіону

Кожний вогневий контакт може тривати випадковий час $T_{\text{випад}}$, що має показовий закон розподілу з математичним сподіванням $T_{\text{срдн}}$, із параметром μ та з інтенсивністю I виникнення вогневих контактів:

$$M[T_{\text{випад}}] = T_{\text{срдн}}, \quad \mu = \frac{1}{T_{\text{срдн}}}, \quad I = \frac{N_{\text{ЗПН}}}{T_{\text{бою}}}. \quad (16)$$

Кожний вогневий контакт може закінчитися враженням ЗРК з імовірністю P^* і переходом процесу (рисунок 4) зі стану S_{01} у стан S_{10} або з імовірністю $(1-P^*)$ мати успішний результат для зрдн, що спричиняє перехід зі стану S_{01} у стан S_{00} .

Показовий розподіл випадкових величин у процесі бою дає змогу скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова [8] для ймовірностей P_{ij} станів S_{ij} моделі бою (рисунок 4), де для зручності похідні ймовірностей станів позначимо точкою і не будемо зображувати у формулі (17) залежність імовірностей від часу:

$$\dot{P}_{00} = -I \cdot P_{00} + \mu \cdot (1-P^*) \cdot P_{01}, \quad \dot{P}_{01} = -\mu \cdot P_{01} + I \cdot P_{00}, \quad \dot{P}_{10} = \mu \cdot P^* \cdot P_{01}. \quad (17)$$

Проінтегруємо систему рівнянь (17) за початкових умов:

$$P_{00}(t=0)=1; \quad P_{01}(t=0)=P_{10}(t=0)=0. \quad (18)$$

Отримаємо:

$$P_{00} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \mu t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \mu t}, \quad P_{01} = \frac{\rho}{\alpha} \left[e^{\lambda_1 \cdot \mu t} - e^{\lambda_2 \cdot \mu t} \right], \quad P_{10} = 1 - \frac{1}{\alpha} \left[\lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \mu t} - \lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \mu t} \right], \quad (19)$$

$$\text{де} \quad \rho = \frac{I}{\mu}, \quad \alpha = \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho(1-2P^*)}, \quad C_{12} = \frac{\alpha \pm (1-\rho)}{2\alpha}, \quad \lambda_{12} = \frac{\pm \alpha - (1+\rho)}{2}. \quad (20)$$

Математичне сподівання кількості $n_{\text{в.к}}$ вогневих контактів (атакованих ЗПН) до моменту часу t відбиття удару ЗПН противника визначимо з урахуванням часу перебування ЗРК у зайнятому стані S_{01} та його «продуктивності» μ :

$$n_{\text{в.к}}(t) = \mu \int_0^t P_{01}(\tau) d\tau = \frac{1}{P^*} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \left[\lambda_1 e^{\lambda_2 \cdot \mu t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 \cdot \mu t} \right] \right). \quad (21)$$

Для перевірки найпростішої моделі бою (19), (20), (21) використаємо рівність (21) і знайдемо максимально можливе значення математичного сподівання кількості вогневих контактів за весь час до моменту враження ЗРК:

$$n_{\text{в.к.}\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} n_{\text{в.к.}}(t) = \frac{1}{P^*} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \cdot 0 \right) = \frac{1}{P^*}. \quad (22)$$

Зазначимо, що результат (22) збігся з одержаним раніше значенням (5) для цієї змінної щодо одного ЗРК.

Далі знайдемо відносне значення математичного сподівання кількості вогневих контактів $n_{\text{в.к}}^*(t)$ для будь-якого моменту t часу бою. Для цього розділимо ліву частину рівняння (21) на ліву частину рівняння (22) і праву частину рівняння (21) – на праву частину рівняння (22), отримаємо:

$$\frac{n_{\text{в.к.}}(t)}{n_{\text{в.к.}\infty}} = \frac{1}{P^*} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \left[\lambda_1 e^{\lambda_2 \cdot \mu t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 \cdot \mu t} \right] \right) \cdot \left(\frac{1}{P^*} \right)^{-1}; \quad (23) \quad n_{\text{в.к.}}^*(t) = 1 - \frac{1}{\alpha} \left[\lambda_1 e^{\lambda_2 \cdot \mu t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 \cdot \mu t} \right]. \quad (24)$$

Знайдемо відносне значення математичного сподівання $n^*(t)$ кількості вражених ЗРК на будь-який момент часу бою t :

$$n^*(t) = \frac{n_{\text{вр.ЗРК}}(t)}{n_0} = \frac{n_{\text{вр.ЗРК}}(t)}{1} = n_{\text{вр.ЗРК}}(t) = 0 \cdot [P_{00}(t) + P_{01}(t)] + 1 \cdot P_{10}(t) = P_{10}(t). \quad (25)$$

Отже, відносне значення математичного сподівання кількості вражених ЗРК у будь-який момент часу дорівнює ймовірності стану P_{10} :

$$n^*(t) = P_{10}(t) = 1 - \frac{1}{\alpha} \left[\lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \mu t} - \lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \mu t} \right]. \quad (26)$$

Порівнявши рівняння (24) і (26), переконуємось у їхній тотожності:

$$n^*(t) = n_{\text{в.к}}^*(t). \quad (27)$$

За допомогою рівнянь (2), (6) і (8) можна виявити, що вираз для відносної величини математичного сподівання $N_{\text{зб.л}}^*(t)$ кількості збитих ЗПН противника відрізняється від виразу $n_{\text{в.к}}^*(t)$ на ймовірність знищення ЗПН у ході вогневого контакту і водночас збігається з рівнянням (21):

$$N_{\text{зб.л}}^*(t) = \frac{N_{\text{зб.л}}(t)}{N_{\text{зб.л}\infty}} = \frac{P_{\text{зб.л}} \cdot n_{\text{в.к}}(t)}{P_{\text{зб.л}} \cdot n_{\text{в.к}\infty}} = \frac{n_{\text{в.к}}(t)}{n_{\text{в.к}\infty}} = n_{\text{в.к}}^*(t). \quad (28)$$

На підставі рівнянь (22)–(28) можна стверджувати, що в описі найпростішої моделі протиповітряного бою (17)–(21) є рівність відносних значень математичних сподівань кількості вогневих контактів і втрат сторін:

$$n^*(t) = N_{\text{зб.л}}^*(t) = n_{\text{в.к}}^*(t). \quad (29)$$

Тож розроблена найпростіша модель бою окремого зрдн виявляється адекватною реальному бою з точністю прийнятих гіпотез 1 і 2 щодо найістотніших властивостей протиповітряного бою.

Для приблизної оцінки очікуваних результатів протиповітряного бою угруповання ЗРВ, що складається з n_0 одноканальних по повітряній цілі ЗРК і відбиває удар противника інтенсивності I ЗПН на хвилину, модель бою угруповання можна замінити на сукупність моделей боїв (17)–(21) одиночних зрдн, кожний із яких відбиває удари ЗПН інтенсивності I_1 :

$$I_1 = \frac{I}{n_0}. \quad (30)$$

У цьому випадку загальний результат можна визначити як суму результатів боїв одиночних зрдн. Для умов розглянутого прикладу протиповітряного бою угруповання ЗРВ (рисунк 1, таблиця 1) застосування рівності (26) дає можливість знайти оцінки результатів бою (таблиця 1, пункти 36–39), що відрізняються від реальних результатів у межах 0,6 %.

Такий ступінь порівняння розрахункових і реальних результатів дає змогу розглядати рівність (26) як варіант аналітичного опису внутрішнього закону протиповітряного бою – рівність відносних значень математичних сподівань втрат сторін у будь-який момент часу бою:

$$w(t) \approx n^*(t) = P_{10}(t) = 1 - \frac{1}{\alpha} \left[\lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \mu t} - \lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \mu t} \right], \quad (31)$$

де елементи рівності (31) описані у рівності (20).

Висновки

Використання елементів технології моделювання [6] дало змогу виявити найістотніші властивості і знайти опис (31) внутрішнього закону (12) реального бою угруповання зенітних ракетних військ під час виконання завдань з ППО. При цьому похибка прогнозу з використанням зазначеного закону може бути меншою за 0,6 % (таблиця 1, пункт 40), що уможливило застосування цього закону для практичного прийняття рішень.

Крім того, використання технології [6] дало змогу вибрати математичний апарат, статистично адекватний процесам бою, за допомогою якого стали можливими побудова моделі протиповітряного бою одиночного зенітного ракетного дивізіону та її застосування для прогнозу результатів протиповітряного бою угруповання ЗРВ.

Розроблена модель описує динаміку бою і має явний аналітичний опис знайденого внутрішнього закону протиповітряного бою, що робить обґрунтованим твердження про її адекватність реальному бою з точністю прийнятих гіпотез 1 та 2 щодо його найістотніших властивостей.

Отже, є підстави вважати, що мети дослідження досягнуто.

Напрямом подальших досліджень вбачається побудова моделей, які відбивають особливості, зазначені для прикладу реального протиповітряного бою угруповання ЗРВ, а саме поява у складі удару повітряного противника груп ЗПН із заздалегідь не відомим (випадковим) складом, а також розташування ЗРК на місцевості, що приводить до ефекту неповної доступності ЗПН противника для обстрілу вільними ЗРК угруповання через обмежені розміри зон вогню ЗРК. Крім того, актуальним напрямом є розроблення моделі, яка дає змогу врахувати можливу взаємну допомогу між зенітними ракетними дивізіонами угруповання ЗРВ під час стрільби по ЗПН противника у їхній спільній зоні зенітного ракетного вогню.

Перелік джерел посилання

1. Zhao Z. Q., Hao J. X., Li L. J. Study on Combat Effectiveness of Air Defense Missile Weapon System Based on Queuing Theory. In *7th International Conference on Electronics and Information Engineering*. Nanjing: SPIE, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2266077>.
2. Rao D. V., Ravishankar M. A. Methodology for Optimal Deployment and Effectiveness Evaluation of Air Defense Resources Using Game Theory. *Sadhana*, 2020. No. 45. Pp. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12046-020-1293-8>.
3. Ding J., Zhao Q., Li J., Xu J. Temporal Constraint Modeling and Conflict Resolving Based on the Combat Process of Air and Missile Defense System. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)*. Bari: IEEE, 2019. Pp. 2684–2689. DOI: <https://doi.org/10.1109/SMC.2019.8914484>.
4. Gao X., Lu C., Tang J., Fan L., Ling Y., Li Y. An Evaluation Method of Object-Oriented Petri Net on Combat Effectiveness of Air Defense and Antimissile. In: *8th IEEE International Conference on Communication Software and Networks (ICCSN)*. Beijing: IEEE, 2016. Pp. 590–596. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCSN.2016.7586592>.
5. Zhong Z., Zhang L. The Combat Application of Queuing Theory Model in Formation Ship to Air Missile Air Defense Operations. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020. **1570**, 012083. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1570/1/012083>.
6. Gorodnov V. P. Option of Methodological and Technological Bases of Development, Evaluation and Forecast the Efficiency of Real Objects' and Processes' Mathematical Models. *InterConf*. No. 67. Pp. 444–460. DOI: <https://doi.org/10.51582/interconf.19-20.07.2021.046>.
7. Городнов В. П. Моделювання бойових дій частин, з'єднань та об'єднань Військ ППО. Харків : ВІРТА, 1987. 380 с.
8. Городнов В. П. Вища математика (популярно, із прикладами) : підручник. Харків : Акад. ВВ МВС України, 2013. 372 с.
9. Городнов В. П. Теоретичні основи моделювання мікроекономічних та інших процесів та систем : монографія. Харків : Акад. ВВ МВС України, 2008. 484 с.

Стаття надійшла до редакції 18.05.2025 р.

MODELING AND FORECAST THE RESULTS OF ANTI-AIRCRAFT MISSILE GROUPING'S AIR DEFENSE BATTLE

During military operations, the protection of important state facilities and troop groups from attacks by enemy air forces is entrusted to surface-to-air missile troops consisting of surface-to-air missile brigades, regiments and subunits that are deployed in combat formations in positional areas and form a grouping of surface-to-air missile forces. Such a group carries out its combat mission during an surface-to-air missile battle, which includes a combination of successive and simultaneous surface-to-air missile battles (fire contacts) between surface-to-air missile divisions (SAMD) and enemy means of air attack (EMAA). The composition of participants, the number of fire contacts and its parameters in space, and time of the battle, as well as possible losses of parties, are unknown in advance (are random).

However, when constructing the combat order of a surface-to-air defense group, there always arises the practical task of predicting such results and parameters of an air defense battle as losses of the enemy's MAA and losses of the group's SAM systems, the number of fire contacts, the sufficiency of the supply of anti-aircraft guided missiles (AAGM) and the composition of the SAMs to repel the first and subsequent strikes of the enemy MAA.

The most reliable is the forecast based on the internal laws of the process under study, which determined the need to search for the internal properties and patterns of surface-to-air defense missile group's battle, which is fundamentally unique in space, in time and in the composition of participants.

For this search, the author's special method and a well-known example of a real battle were used. The method allowed us to identify the main properties and internal law of battle, select a statistically sound mathematical modeling apparatus in the class of Markov processes with continuous time and discrete states, develop the necessary model with an analytical representation of the internal law of battle, test its adequacy using a real air battle example, and evaluate the accuracy of forecasting using the developed model.

Keywords: *air defense, surface-to-air missile forces grouping, Markov processes, modeling.*

Городнов Вячеслав Петрович – доктор військових наук, професор, професор кафедри забезпечення державної безпеки, Національна академія Національної гвардії України
<https://orcid.org/0000-0001-8593-8871>